



Peter Winkler



Mehr
mathematische Rätsel
für Liebhaber



Peter Winkler

Spektrum
AKADEMISCHER VERLAG
Sachbuch

Mehr
mathematische Rätsel
für Liebhaber

Mehr Mathematische Rätsel für Liebhaber

Peter Winkler

Mehr Mathematische Rätsel für Liebhaber

Aus dem Amerikanischen übersetzt von
Thomas Filk

Spektrum
AKADEMISCHER VERLAG

Titel der Originalausgabe: Mathematical Mind-Benders

Aus dem Amerikanischen übersetzt von Thomas Filk

© 2007 by A K Peters, Ltd.

Wichtiger Hinweis für den Benutzer

Der Verlag, der Autor und der Übersetzer haben alle Sorgfalt walten lassen, um vollständige und akkurate Informationen in diesem Buch zu publizieren. Der Verlag übernimmt weder Garantie noch die juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für die Nutzung dieser Informationen, für deren Wirtschaftlichkeit oder fehlerfreie Funktion für einen bestimmten Zweck. Der Verlag übernimmt keine Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren, Programme usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buch berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag hat sich bemüht, sämtliche Rechteinhaber von Abbildungen zu ermitteln. Sollte dem Verlag gegenüber dennoch der Nachweis der Rechtsinhaberschaft geführt werden, wird das branchenübliche Honorar gezahlt.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
springer.de

© Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg 2010

Spektrum Akademischer Verlag ist ein Imprint von Springer

10 11 12 13 14 5 4 3 2 1

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Planung und Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger, Bianca Alton

Satz: le-tex publishing services GmbH, Leipzig

Umschlaggestaltung: wsp design Werbeagentur GmbH, Heidelberg

ISBN 978-3-8274-2349-8

Dieses Buch hat unzählige Autoren. Sie leben in der ganzen Welt und von ihnen habe ich diese wunderbaren Knocheien. Einige von ihnen haben mein früheres Buch gelesen, andere gehören zu meinen neuen Freunden und Kollegen in Neu England. Besonders danken möchte ich auch den Stiftern der Albert Bradley Third Century Professur in den Naturwissenschaften in Dartmouth.

Alle eigenen Beiträge widme ich meinen Eltern, Drs. Bernard und Miriam Winkler. Irgendwann hatten sie vermutlich gehofft, ihr erstgeborener Sohn würde einmal ein nützliches Mitglied der Gesellschaft, und dann mussten sie mit ansehen, wie er zu einem Mathematiker heranwuchs.

Vorwort

Die Mathematik ist kein Spaziergang entlang einer breiten Allee, sondern eine Reise in eine fremde Wildnis, in der man leicht verloren gehen kann.

W. S. Anglin

Dieses Buch richtet sich an Liebhaber der Mathematik, Liebhaber von Rätseln und Liebhaber von anspruchsvollen intellektuellen Knocheleien. In erster Linie möchte ich all jene ansprechen, für die die Welt der Mathematik wohlgeordnet, logisch und anschaulich ist, und die gleichzeitig offen dafür sind, sich eines Besseren belehren zu lassen.

Wer die Rätsel verstehen und lösen möchte, sollte einen gewissen Spaß an der Mathematik mitbringen, auch wenn das alleine oft nicht ausreichen wird. Man sollte wissen, was ein Punkt und eine Linie sind, was eine Primzahl ist, und was die Wahrscheinlichkeit dafür ist, einen Sechser-Pasch zu wür-

fein. Insbesondere sollte man eine Vorstellung davon haben, was ein *Beweis* ist.

Sie brauchen *keinen* professionellen mathematischen Hintergrund, und Sie benötigen auch keinen Computer, Taschenrechner oder irgendein Mathematikbuch. Allerdings sollten Sie – wie Paul Erdős es ausgedrückt hätte – Kopf und Verstand weit öffnen. In manchen Fällen dürfte es von Vorteil sein, keine Vorlesungen zur Mathematik besucht zu haben, und in anderen Fällen werden Sie die Antwort lesen und verstehen, und sie trotzdem nicht glauben wollen.

Von überall her stammen diese Rätsel und von Leuten mit den unterschiedlichsten Interessen. Seit der Veröffentlichung meines letzten Rätselbuchs¹ erhielt ich viele neue und alte Rätsel. Irgendwann musste ich überrascht feststellen, dass ich seither mehr unveröffentlichte Puzzles hinzugewonnen habe, sowohl hinsichtlich ihrer Menge als auch ihrer Qualität, als in den ganzen zwanzig Jahren zuvor.

Aufmerksame Leser meines früheren Buchs werden einige Unterschiede bemerken. Die Rätsel haben oft ein Überraschungsmoment; einige stammen aus meinem Artikel für das Siebte Gardner-Treffen: „Seven Mathematical Puzzles You Think You Must Not Have Heard Correctly“ (Sieben mathematische Rätsel, bei denen Sie glauben, sich verhöhrt zu haben). Ich habe mich auch bemüht, die Quellen der Rätsel etwas sorgfältiger zu recherchieren als früher, sodass zumindest *einige* Informationen diesbezüglich stimmen dürften. Abgesehen von meinen eigenen Rätseln kann ich jedoch kaum mehr als ein „redliches Bemühen“ versprechen. Angeregt durch Kommentare meiner Leser habe ich bei der Darstellung der Lösungen auch versucht zu erläutern, wie man auf die jeweilige Lösung hätte kommen können. Leider dürfte mir das in vielen Fällen nicht gelungen sein, und manchmal weiß ich es selbst nicht.

¹ *Mathematische Rätsel für Liebhaber*, Spektrum Akademischer Verlag

Die Formulierungen der Rätsel und ihrer Lösungen stammen von mir, und daher bin ausschließlich ich für alle Fehler oder Mehrdeutigkeiten verantwortlich, und davon wird es ein geben, da bin ich mir sicher.

Ich wollte für dieses Buch elegante und unterhaltsame Rätsel zusammentragen. Die Lösungen selbst sind nicht schwer, aber es ist oft nicht leicht, sie zu finden; häufig vermitteln sie eine gewisse Vorstellung von einem bestimmten mathematischen Konzept, aber sie erfordern keine anspruchsvolle Mathematik. Insbesondere war es meine Absicht, Sie mit diesen Rätseln zu verblüffen, Ihre Intuition und Anschauung herauszufordern und Denkanstöße zu geben. Nicht alle Rätsel erfüllen diese Kriterien, aber es gibt unter ihnen einige Prachtexemplare. Der Spaß und die Freude an der Erkenntnis werden hoffentlich den bescheidenen Preis dieses Buches weit übertreffen. Einige Beispiele sind „Kurven auf Kartoffeloberflächen“ S. 3, „Roulette für Unvorsichtige“ S. 4, „Liebe in Kleptopia“ S. 13, „Wasserscheue Würmer“ S. 14, „Fehlerhaftes Zahlenschloss“ S. 15, „Namensuche in Schachteln“ S. 17, „Chamäleons“ S. 32, „Gleichschwere Brötchen“ S. 34, „Zwei Blinker (fast) im Takt“ S. 34, „Rote und blaue Würfel“ S. 35, „Alice auf dem Meterstab“ S. 58, „Alice auf dem Kreis“ S. 58, „Münzen auf dem Tisch“ S. 73, „Paket im Paket“ S. 76, „Leicht beeinflussbare Denker“ S. 98, „Lemming auf einem Schachbrett“ S. 99, „Hüte und Unendlichkeit“ S. 136, „Ziegturm“ S. 139, „Eiscremetorte“ S. 165, „Drei Schatten einer Kurve“ S. 166, „Minimalfläche eines Polygons“ S. 169, ...

Ein paar Anmerkungen zum Aufbau des Buches. Ich habe die Rätsel in Kapiteln zusammengefasst, die mehr oder weniger unterschiedlichen mathematischen Gebieten entsprechen. Die Lösungen stehen jeweils am Ende der jeweiligen Kapitel; Einzelheiten zum Hintergrund und zur Quelle finden Sie bei den Lösungen. Die ursprüngliche Frage wird bei den Lösungen nicht nochmals wiederholt, denn ich wollte

das Rätsel und die Lösungen nicht auf dieselbe Seite schreiben. Damit hoffe ich den Leser dazu anregen zu können, zumindest *etwas* über das Rätsel nachzudenken.

Viele der Rätsel haben es in sich, und Sie können zurecht auf jede Lösung stolz sein, die Sie eigenständig finden. In manchen Fällen dürfte sogar das Verstehen der Lösung mit einigem Aufwand verbunden sein.

Viel Glück, und frohes Rätseln!

Peter Winkler

Anmerkungen zur deutschen Ausgabe

In den Text sind viele Anregungen und Verbesserungsvorschläge von argusäugigen Lesern eingeflossen, allen voran von meinem genialen Freund Svante Janson (von der Uppsala Universität in Schweden). Offenbar hat er sämtliche Aufgaben zunächst selbst gelöst, bevor er seine Lösungen mit meinen verglichen hat.

Im Vergleich zur amerikanischen Ausgabe (A K Peters Ltd., 2007) wurde für die deutsche Ausgabe ein Kapitel über Wortspielereien herausgenommen, da sich diese oft schlecht übersetzen lassen. Stattdessen wurde ein neues Kapitel angehängt, das einige besonders unterhaltsame und „unwiderstehliche“ neue Rätsel enthält, über die ich seit der Veröffentlichung des Buches gestolpert bin.

Peter Winkler

Inhaltsverzeichnis

1	Zum Aufwärmen	1
2	An die Grenzen der Vorstellungskraft	13
3	Zahlen und ihre Eigenschaften	31
4	Die Abenteuer der Ameise Alice	57
5	Zwei und drei Dimensionen	73
6	Linien und Graphen	95
7	Spiele und Strategien	111
8	Besuch bei alten Freunden	133
9	Wirkliche Herausforderungen	165

10 Unwiderstehliche Desserts	191
Nachwort	211
Rätselindex	213
Literaturverzeichnis	217

1 Zum Aufwärmen

Gehirn (n.) Ein Organ, mit dem wir denken, dass wir denken.

Ambrose Bierce (1842–1914),
„Des Teufels Wörterbuch“

Wir beginnen mit einigen (relativ) einfachen Aufgaben als Dehnübungen für Ihren Kopf. Die Mathematik ist nicht schwierig, aber etwas logisches Denken ist angesagt.

Halb erwachsen

In welchem Alter hat ein Durchschnittskind die Hälfte der Körpergröße erreicht, die es einmal als Erwachsener haben wird?

Murmelsäcke

Sie haben 15 Murmelsäcke. Wie viele Murmeln müssen Sie mindestens haben, sodass es möglich ist, dass keine zwei Säcke dieselbe Anzahl von Murmeln enthalten?

Potenzen von Zwei

Aus wie vielen Personen bestehen „zweimal zwei Paare von Zwillingen“?

Der rollende Bleistift

Ein Bleistift mit einem fünfeckigen Querschnitt hat auf einer seiner fünf Seiten das Logo des Herstellers. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt der Bleistift, wenn er über den Tisch gerollt wird, so liegen, dass das Logo nach oben zeigt?

Das Portrait

Ein Besucher zeigt auf ein Portrait an der Wand und fragt, um wen es sich handelt. „Brüder oder Schwestern habe ich keine“, sagt der Gastgeber, „doch der Vater dieses Mannes ist meines Vaters Sohn.“ Wer ist abgebildet?

Seltsame Folge

Welches Symbol sollte in der unten dargestellten Folge als Nächstes kommen?

NYXM

Ein Sprachparameter

Für Spanisch, Russisch oder Hebräisch ist der Parameter 1; für Deutsch 7; für Französisch 14. Wie lautet der Wert für Englisch?

Paraskavedekatriaphoben aufgepasst!

Fällt der 13. eines Monats häufiger auf einen Freitag als auf einen anderen Wochentag, oder *scheint* es nur so?

Nun wird es *etwas* ernster.

Fairplay

Wie können Sie mit einer verbogenen Münze trotzdem noch eine gerechte Entscheidung (50% Wahrscheinlichkeit für jedes Ereignis) herbeiführen?

Kurven auf Kartoffeloberflächen

Beweisen Sie, dass Sie bei zwei verschiedenen (beliebig geformten) Kartoffeln jeweils auf die Oberfläche eine geschlossene Kurve zeichnen können, sodass die beiden Kurven als Kurven im dreidimensionalen Raum identisch sind.

Sie können Ihre Aufwärmübungen mit drei Problemen aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeit abschließen; dafür ist eine *winzige* Rechnung notwendig.

Sieger in Wimbledon

Aufgrund magischer Kräfte sind Sie ins Einzel-Endspiel in Wimbledon gelangt und spielen nun gegen Serena Williams oder Roger Federer um Alles oder Nichts. Allerdings können Sie Ihre magischen Kräfte nicht bis zum Ende des Spiels behalten. Wenn es schon sein muss – bei welchem Spielstand sollte die Magie verschwinden, sodass Ihre Chancen auf einen glücklichen Gesamtsieg möglichst groß sind?