

Teil 1

Entwicklung von Rechenkompetenzen, Merkmale von Rechenschwächen sowie Prinzipien der Diagnostik und Mathematikförderung

1.1 Entwicklung von Rechenkompetenzen im Kindesalter

1.1.1 Entwicklung allgemeiner intellektueller Kompetenzen

Zur Beschreibung der kognitiven Entwicklung von Kindern wird nach wie vor häufig die entsprechende Theorie von Piaget (1952) herangezogen. Sie hat im Laufe der Jahre diverse kleinere Modifikationen und Ausdifferenzierungen erfahren. Mitunter wurden ihr auch verschiede-

ne Alternativen entgegen gesetzt (vgl. Demetriou, Shayer & Efklidas, 2007). Als die wichtigsten Modelle lassen sich in dieser Hinsicht der Informationsverarbeitungs-, der Wissenserwerbs- und der soziokulturelle Ansatz nennen (Atkinson, Atkinson, Smith, Bem & Loen-Hoeksema, 2001). Beim ersten Konzept wird kognitive Entwicklung als Ausdruck des Erwerbs mehrerer voneinander abgetrennter Fähigkeiten der Informationsverarbeitung gesehen (Case, 1985; Klahr & MacWhinney, 1998). Beim Wissenserwerbsansatz geht man davon aus, dass Erwachsene gegenüber Mädchen und Jungen jenseits des Kleinkindalters ein besseres Verständnis davon haben, wie Fakten in einem bestimmten Wissensbereich organisiert sind. Die grundlegenden kognitiven Prozesse und Fähigkeiten sind hingegen relativ ähnlich (Chi, 1978). Gemäß des soziokulturellen Ansatzes sind Kinder als Subjekte zu betrachten, die als unbedarfte Neulinge lernen, die soziale Wirklichkeit aus der Perspektive der Kultur zu sehen, in die sie hineingeboren wurden (Bem, 1993). Die genannten Modelle haben wichtige Impulse für das Verständnis der geistigen Reifung im Kindesalter geliefert. Piagets (1996) Theorie gilt in dieser Hinsicht trotzdem nach wie vor als wegweisend. Die folgenden Ausführungen weisen die Grobstruktur seines Stufenmodells auf und enthalten wichtige Prämissen seines Konzepts. Allerdings wurden an den jeweils relevanten Stellen aktuellere Erkenntnisse mit einbezogen und Erweiterungen vorgenommen.

Kinder müssen verschiedene Entwicklungsphasen durchlaufen, um letztendlich in der Lage zu sein, zielgerichtete geistige Handlungen durchzuführen. Dies ist eine wichtige Voraussetzung dafür, um später den Anforderungen im Mathematikunterricht gerecht zu werden und daran anknüpfende Alltagskompetenzen zu entwickeln. Im Fokus der Theorie von Piaget (1952) steht die so genannte Adaptation. Damit ist das Formen von spezifischen psychologischen Strukturen gemeint, die als Schemata bezeichnet werden. Diese entstehen im Zuge einer aktiven Auseinandersetzung mit der Umwelt. Im Kleinkindalter handelt es sich bei diesen Schemata um einfache sensumotorische Handlungsmuster: Ein Mädchen oder Junge nimmt über die Sinne einen Stimulus wahr (sensorisch), reagiert handelnd darauf (motorisch) und erfährt im Anschluss die Wirkung seines Verhaltens (sensorisch). So lernt ein Kind beispielsweise, eine ins Blickfeld geratene Birne zu nehmen, zum Mund zu führen, diesen zu öffnen, ein Stück abzubeißen, zu kauen und he-

runter zu schlucken. Ein solches Schema im Sinne einer Abfolge von zusammengehörigen und aufeinander aufbauenden Schritten lässt sich dann auch bei Äpfeln und manchen weiteren Fruchtarten zielführend einsetzen. Bei Orangen sowie bei manchen anderen Obstsorten und Lebensmitteln funktioniert dies allerdings u. U. nicht gut bzw. überhaupt nicht. Gleiches gilt für nicht essbare Gegenstände. Bei der Adaptation kommt es deswegen ständig zu zwei entgegen gesetzten Aktivitäten: Assimilation und Akkomodation. Beide Prozesse sind für die geistige Entwicklung notwendig. Während der Assimilation werden neue Erfahrungen oder Erlebnisse in bestehende Schemata eingeordnet, um die äußere Welt zu strukturieren. Hingegen entwickeln sich bei der Akkomodation neue bzw. angepasste Schemata als Reaktion auf neue Umwelthanforderungen. Tritt eine neue Herausforderung auf, wird zunächst versucht, das Ereignis mit Hilfe bereits vorhandener Repräsentationen zu erklären (Assimilation). Funktioniert dies nicht, passt sich das Kind der neuen Umwelthanforderung an (Akkomodation).

Die frühen Schemata sind sensumotorischer Natur. Es bilden sich im Laufe der Zeit zunehmend kognitive Handlungsmuster heraus, welche die Grundlage für die Durchführung verschiedener Denkopoperationen darstellen. Nach Piaget (1996) verläuft die kindliche Entwicklung im kognitiven Bereich in vier Stadien:

(1) Sensumotorische Phase (Geburt bis 2 Jahre): Hier lernen Kinder, die Beziehungen zwischen ihren Handlungen und deren Konsequenzen zu erkennen. Ihnen wird beispielsweise bewusst, dass eine Blumenvase deswegen vom Tisch fällt, weil sie an der Decke gezogen haben, auf der diese stand. Sie erkennen, was passiert, wenn sie Gegenstände berühren, stoßen, ziehen oder fallen lassen. Derartige Einsichten bilden sich zunächst über die aktive Wiederholung bestimmter Verhaltensweisen heraus, später dann über gezieltes Experimentieren. Auf diese Weise erlernen die Kinder über die Adaptation auch, Objekte allmählich kategorial zu erfassen. Während für sie zunächst jeder Gegenstand, mit dem sie in Kontakt kommen, eine einzigartige Individualität besitzt, erkennen sie später, dass verschiedene Objekte aufgrund bestimmter Merkmale als ähnlich oder gleich angesehen werden können (Hasselhorn, 1996). Ein Ball ist irgendwann nicht mehr in seiner Art einmalig, sondern ein Teil einer Gruppe, deren Elemente mehr oder minder homo-

gen sind. Das hauptsächlich verbindende Merkmal ist in diesem Fall die Kugelform. Kinder beginnen ihre Ordnungsbildung zunächst in sehr grober und ungenauer Weise. In einem frühen Stadium werden z. B. eine Christbaumkugel oder eine Wassermelone als Teil derselben Klasse wahrgenommen, in der sich auch die Bälle befinden. Erst im Zuge des eben erwähnten aktiven Wiederholens und des gezielten Experimentierens mit den als gleichartig angesehenen Objekten erkennen die Kinder, dass diese weiter ausdifferenziert werden müssen. Denn eine Christbaumkugel bleibt nicht genauso unbeschadet wie ein Plastikball, wenn man sie eine Treffe hinunterwirft oder sie fest zusammendrückt (Grünke & Stemmler, 2004).

In den letzten Jahren sind im Rahmen verschiedener Studien zahlreiche so genannte Habituerungsversuche durchgeführt worden, bei denen es darum ging, zu erkunden, zu welchen Ordnungsbildungen bereits Kleinkinder verschiedenen Alters fähig sind. Die meisten dieser Arbeiten basieren auf der Annahme, dass sie neue Gegenstände länger betrachten als solche, an die sie sich bereits gewöhnt haben. Präsentiert man neunmonatigen Kindern beispielsweise hintereinander mehrere Spielzeugmöbelstücke, so schenken sie diesen in der Regel immer weniger Aufmerksamkeit. Gibt man ihnen jedoch zwischendurch ein Element einer anderen Kategorie in die Hand (z. B. ein Plastiktier), so beschäftigen sie sich damit vergleichsweise lange (Pauen, 2002). Die Fähigkeit zur ökonomischen Ordnungsbildung ist ein wesentliches Merkmal einer guten allgemeinen intellektuellen Leistungsfähigkeit. Denn eine sinnvolle Kategorisierung erleichtert die Abspeicherung und den Abruf von Informationen ganz erheblich. Das zunehmende Wissen über Objekte und ihre Zugehörigkeit zu Klassen aufgrund bestimmter Eigenschaften erweitert außerdem die Handlungskompetenz. Kinder können zusehends treffsicherer solche Mittel auswählen, die notwendig sind, um bestimmte Ziele zu erreichen. Möchten sie sich z. B. Süßigkeiten aus einem Küchenschrank holen, so wissen sie im Laufe der Zeit immer besser, welche Bewegungsabfolgen zu vollführen sind und welche Gegenstände sich dazu eignen, um darauf zu steigen und sich damit Zugang zu den Leckereien zu verschaffen.

Charakteristisch für die sensumotorische Phase ist außerdem das allmähliche Erkennen der so genannten Objektpermanenz. Damit ist gemeint, dass Mädchen und Jungen lernen, Dinge auch dann als exis-

tent zu betrachten, wenn sie sich außerhalb ihres Sichtfeldes befinden. In verschiedenen Versuchen konnte Piaget (1996) feststellen, dass sich Kinder bis zu einem gewissen Alter (etwa 12 Monate) so verhalten, als gäbe es einen bestimmten Gegenstand gar nicht mehr, sobald man ihn mit einem Sichtschutz verdeckt.

(2) Voroperationale Phase (2 bis 7 Jahre): Dieser Abschnitt ist durch die außerordentliche Zunahme mentaler Repräsentationen, den Spracherwerb und die Kommunikation charakterisiert. Hier können Schemata bereits bewusst manipuliert werden. Das Kind ist also dazu fähig, Handlungen ohne sichtbare Ausführung zu durchdenken. Es wird ihm nach und nach möglich, Symbole für Handlungsabläufe zu verwenden (z. B. aus einem leeren Teller essen oder die Bewegungen eines Tieres nachahmen). Allerdings bereitet es ihm noch Schwierigkeiten, konkrete Handlungen mental umzudeuten, so dass es insbesondere bei physikalisch irrelevanten Transformationen zu logisch inkonsistenten Aufgabenlösungen kommt. Dies wird u. a. an den bekannten Umschüttversuchen von Piaget (1962) deutlich. Er zeigte Kindern hierbei zwei identische Gläser mit Wasser. Nachdem sie bestätigten, dass die Gefäße die gleiche Menge an Flüssigkeit enthielten, schüttete er den Inhalt eines Glases in einen breiten und flachen Behälter. Die Kinder waren nun der Ansicht, dass sich die Wassermenge dadurch verringert hätte. Grund für diese Einschätzung war das Absenken der Oberfläche. Den Kindern fehlte in dieser Phase also das Verständnis dafür, dass bestimmte physikalische Merkmale eines Objektes gleich bleiben, auch wenn sich ihr äußeres Erscheinungsbild ändert. Allerdings ist heute davon auszugehen, dass Mädchen und Jungen auch schon vor dem siebten Lebensjahr häufig erkennen, dass sich die Mengen durch das Umschütten nicht verändern (Morra, Gobbo, Marini & Sheese, 2009). Typisch für dieses Stadium ist außerdem ein egozentrisches Weltbild. Kinder sind hierbei der Auffassung, dass alle anderen Menschen die Dinge ganz genauso wahrnehmen wie sie selbst. Ein Beleg für diese Auffassung sind Piagets Versuche rund um das so genannte Drei-Berge-Problem. Hierbei wurden Kindern drei Berge aus Pappmaché gezeigt, die Teil einer Modelllandschaft waren. Die Szenerie befand sich auf einem Tisch, um den sie zunächst herumgehen durften, um sich mit allen Details vertraut zu machen. Im Anschluss sollten sie die Perspektive einer Puppe be-

schreiben, die auf der einen Seite des Modells saß, während sie sich auf der anderen Seite befanden. Die Kinder waren offenkundig unfähig, die Sichtweise der Puppe einzunehmen und beschrieben die Berge stets nur aus ihrer eigenen Sicht (Lefrancois, 1994). Liben (1975) konnte jedoch nachweisen, dass Mädchen und Jungen in der voroperationalen Phase in manchen Situationen doch dazu fähig sind, die Welt aus der Perspektive anderer Menschen zu sehen. In einem entsprechenden Versuch bat er Kinder um eine Einschätzung, wie eine weiße Karte für eine Person aussähe, wenn sie verschiedenartige Brillen tragen würde. Während sie das Drei-Berge-Problem überforderte, konnten sie die Frage bei einem solch einfach zu verstehenden Szenario oft richtig beantworten.

(3) Konkret-operationale Phase (7–12 Jahre): In dieser Stufe sind die geistigen Fähigkeiten viel logischer und flexibler organisiert als in den vorherigen Stadien. Das Denken zeichnet sich durch Identität, Kompensation und Reversibilität aus. Ein Verständnis für die Identität von Dingen bezeichnet die Einsicht, dass ein Material ohne Hinzufügung oder Wegnahme gleich bleibt. Mittels des Konzepts der Kompensation kann das Kind erkennen, dass ein in bestimmter Weise verändertes Material oft wieder in seinen Ursprungszustand zurückversetzt werden kann (beim Umschütten von Wasser in ein schmaleres Glas wird der Flüssigkeitspegel automatisch höher; der Wasserspiegel kehrt nach dem erneuten Umschütten jedoch auf das ursprüngliche Level zurück). Das Verstehen der Reversibilität befähigt Mädchen und Jungen dazu, Planungsschritte abzuwandeln bzw. die Richtung zu ändern. Sie sind sich darüber bewusst, dass Objekte nach verschiedenen Kriterien sortiert werden können (so lassen sich z. B. Murmeln nach Farbe oder nach Größe ordnen). Kinder erweisen sich hier bereits als gute Problemlöserinnen und Problemlöser, allerdings ist das logische Denken oft noch an konkrete Situationen gebunden.

(4) Formal-operationale Phase (ab 12 Jahren): In dieser Stufe bildet sich die Kompetenz heraus, abstrakt und theoretisch zu denken. Mädchen und Jungen können mit Hilfe innerer Reflexionen neue Regeln aufstellen und logische Schlussfolgerungen ziehen. Man spricht hier auch vom hypothetisch-deduktiven Denken. Jugendliche sind in diesem Stadium in der Lage, über mögliche Ausgänge von Versuchen zu sin-

nieren und ihre Annahmen im Anschluss systematisch zu überprüfen. Kompetenzen im propositionalen Denken werden in dieser Stufe auch erreicht: Die jungen Menschen können die Logik verbaler Aussagen (Propositionen) bewerten, ohne sich auf aktuelle reale Situation beziehen zu müssen. Behauptungen sind hinsichtlich ihres Wahrheitsgehalts beurteilbar, ohne dabei die konkreten Eigenschaften in der Situation erkunden zu müssen.

1.1.2 Entwicklung spezieller Kompetenzen im mathematischen Bereich

Eine wunschgemäß verlaufende kognitive Reifung im eben beschriebenen Sinne und eine daraus resultierende gute Intelligenz gehören zu den wichtigsten Einzelprädiktoren für die Schulleistung im Allgemeinen und die mathematische Kompetenz im Besonderen (Stern, 1997; Zielinski, 1998). Unter mathematischer Kompetenz wird die Fähigkeit verstanden, die Rolle der Mathematik in Alltagssituationen zu erkennen und sie so zu verwenden, dass eine konstruktive gesellschaftliche Teilhabe unterstützt wird (Felbrich, Hardy & Stern, 2008). Es geht hierbei also um viel mehr als nur um das „simple“ Beherrschen rechnerischer Prozeduren. Um dieses weiterführende Ziel zu erreichen, ist es von essenzieller Bedeutung, das Wesen von Zahlen und deren Eigenschaften zu verstehen. Gelman und Gallistel (1978) postulieren in diesem Zusammenhang fünf Prinzipien, die von Kindern verinnerlicht worden sein müssen, damit sie die Grundrechenarten flexibel und im Alltag sinnvoll einsetzen können:

- a) Stabile Ordnung (die Reihe der Zahlwörter liegt in einer festgelegten und stets wiederholbaren Ordnung vor),
- b) eindeutige Zuordnung (jedem Element einer zu zählenden Menge wird genau ein Zahlwort zugeordnet),
- c) Anzahlbestimmung (das letzte beim Auszählen einer Menge verwendete Zahlwort gibt die Mächtigkeit einer Menge an),
- d) Abstraktion von qualitativen Eigenschaften (die anderen vier Prinzipien sind auf beliebige Objekte anwendbar, so lange diese unterscheidbar und damit zählbar sind) und

- e) Abstraktion von räumlichen Anordnungen (die anderen vier Prinzipien können generell immer angewendet werden – unabhängig von der räumlichen Anordnung der auszuzählenden Objekte).

Damit Kinder ein elaboriertes Verständnis für diese Grundsätze entwickeln können, müssen sie verschiedene Stufen durchlaufen. Auch im Bereich des Erwerbs mathematischer Fähigkeiten gilt eher die Entwicklungsverzögerungs- als die Strukturdifferenzhypothese. Mädchen und Jungen absolvieren demnach stets die gleichen Schritte in identischer und unabänderlicher Reihenfolge. Nennenswerte Unterschiede gibt es lediglich im Hinblick auf die Geschwindigkeit (Mähler & Hasselhorn, 1990). Diese Sichtweise entspricht im Übrigen den Annahmen von Piaget (1970). Demnach weisen auch Kinder mit gravierenden Problemen im Rechnen keine grundsätzlich andersartigen kognitiven Strukturen auf als ihre in dieser Hinsicht normal entwickelten Peers. Sie befinden sich „lediglich“ auf einer niedrigeren Kompetenzstufe.

(1) Phase der Vorläuferfähigkeiten für spätere Zahlenkompetenzen (0 bis 2 Jahre): Kleinkinder können normalerweise nicht nur Objekte sinnvoll in Kategorien einteilen (siehe oben), sondern auch Mengen. Schon Neugeborenen ist es möglich, bestimmte Anzahlen von Silben oder Tönen zu differenzieren (van Marle & Wynn, 2003). Starkey und Cooper (1980) stellten fest, dass Säuglinge bereits nach wenigen Wochen in der Lage sind, zwischen zwei oder drei Punkten zu unterscheiden. Die wahrnehmungsgestützte Fähigkeit, kleine Mengen zu erfassen, wird als „Subitizing“ bezeichnet. Es scheint sich hierbei um eine angeborene Kompetenz zu handeln, die nicht unmittelbar mit numerischem Wissen verbunden ist (Moser Opitz, 2008). Nach Xu (2003) ist es in diesem frühen Stadium jedoch noch nicht möglich, hierbei die mengenmäßige Bedeutung der Gegenstände zu begreifen. Die Einschätzungen basieren auf einem so genannten Objekt-Pfad-System, bei dem jedes Element als eigene Größe gesehen wird. Kann das Kind später im Alter von sechs Monaten dann größere Mengen von vier und acht, acht und 16 oder 16 und 32 voneinander unterscheiden, so erfolgt der Vergleich dadurch, dass es die von den Elementen bedeckte Fläche durch die gemittelte Distanz zwischen den dargebotenen Objekten teilt. Es geht hierbei also um die Wahrnehmung einer Gesamtkonfiguration,

nicht um die einzelner Teile. Größere Mengen können von sechsmonatigen Säuglingen mit Hilfe eines Zahlenwort-Schätz-Systems übrigens nur dann differenziert werden, wenn diese ein Verhältnis von 1:2 aufweisen, aber nicht, wenn es 2:3 beträgt. Dies ist in der Regel erst etwa neunmonatigen Säuglingen möglich (Jacobs & Petermann, 2007). Suanda, Tompson und Brannon (2008) wiesen unlängst nach, dass bereits einjährige Mädchen und Jungen die Größen von Mengen entlang eines Kontinuums einordnen können. Ihnen ist der ordinale Aspekt von Zahlen also bereits in Ansätzen bewusst. Die Fähigkeit zur Differenzierung von Rangreihen bildet sich im Verlauf der folgenden Monate weiter aus.

(2) Phase numerischer Grundfertigkeiten (2 bis 4 Jahre): Mit etwa zwei Jahren beginnen Kinder üblicherweise vermehrt mit dem Zählen von Gegenständen. Im Alter von 18 Monaten können sie dies zwar bereits mit Mengen von bis zu vier Objekten, später entwickeln sie daran jedoch ein gesteigertes Interesse. Sie zählen beispielsweise häufig ihre Finger, erkennen in diesem Stadium allerdings noch nicht, dass hinter den aufgesagten Zahlen Mengen stehen. Vielmehr ordnen sie etwa der 1, der 2, der 3 usw. bestimmte Finger zu (Krajewski, 2008). Zahlworte werden hier also zunächst im Sinne von Adjektiven verwendet und erst später als besondere Begriffe erkannt. Die in der vorherigen Stufe erworbenen Fähigkeiten zur Unterscheidung von Mengen vertiefen sich in dieser Phase weiter.

Kinder erschließen sich in dieser Stufe allmählich den Zahlbegriff. Sie lernen, kleinere Anzahlen in eine Reihenfolge zu bringen und Größer-Kleiner-Relationen zu erkennen. Nun wissen sie, dass 1 kleiner als 2 oder 4 größer als 3 ist. Begriffe wie „viel“, „wenig“, „mehr“ oder „weniger“ gewinnen an Bedeutung. Sie werden also zusehends besser dazu fähig, einfache Seriationen zu bilden. Zahlworte korrespondieren nun mit groben Mengenbegriffen (z. B. wenig, viel, sehr viel) (Brannon, 2002; Fritz & Ricken, 2008). Allerdings können eng beieinander liegende Zahlen noch nicht miteinander verglichen werden. Das so genannte Anzahlkonzept ist noch recht unpräzise, da Mädchen und Jungen bislang nur über so grobe Kategorien wie „wenig“, „viel“ und „sehr viel“ verfügen. Somit sind z. B. 18 und 19 Teil derselben Klasse (Werner, 2009).

(3) Phase des (präzisen) Anzahlkonzepts (4 bis 6 Jahre): Mädchen und Jungen verstehen nun allmählich, dass die Zahlenfolge exakte, aufsteigende Quantitäten repräsentiert. Für den Vergleich von Mengen kann jetzt das Zählen herangezogen werden. Denn die Dauer des Zählens steht mit der Größe einer Zahl im Zusammenhang. Vergegenwärtigen sich Kinder etwa zwei Zahlen, die beide einer bestimmten impliziten Kategorie entstammen, so ist ihnen nun bewusst, dass sie sich differenzieren lassen. So mögen etwa 18 und 19 beide als „viel“ eingestuft werden, aber dennoch sind sie nicht mehr als identisch anzusehen, da man bis zur 19 etwas länger zählen muss als bis zur 18. Während sich die Fähigkeit zur immer differenzierteren Ordnungsbildung im Zuge der allgemeinen intellektuellen Reifung mehr und mehr herausbildet (siehe oben), entwickelt sich auch die Kompetenz zur präzisen Klassifikation von Zahlen. Kinder lernen in dieser Phase im Übrigen auch, dass sich Mengen nur dann verändern, wenn etwas hinzugefügt oder weggenommen wird und dass Mengen sowohl in kleinere Mengen zerlegt als auch wieder zusammengesetzt werden können (Krajewski, 2008). Das Verständnis für dieses Phänomen stellt eine ganz zentrale Voraussetzung für den Erwerb arithmetischer Kompetenzen dar. In dieser Phase bildet die Zahlwortreihe für Kinder noch immer eine rigide Sequenz. Sie müssen beim Zählen stets bei der 1 beginnen.

(4) Phase des Erwerbs sekundärer Mathematikkompetenzen in der Grundschule (6 bis 9 Jahre): Bis zum Ende der dritten Stufe haben Kinder im günstigen Fall alle notwendigen primären Fähigkeiten erworben, die vonnöten sind, um im mathematischen Anfangsunterricht zu bestehen. Ab dem Beginn der vierten Phase geht es nun darum, die in der Schule explizit vermittelten Kompetenzen zu erlernen, die für die sichere Durchführung der Grundrechenarten auf verschiedenen Schwierigkeitsstufen unabdinglich sind. Mädchen und Jungen können im Verlauf dieses Entwicklungsabschnitts arabische Zahlen (z. B. 13) immer sicherer in sprachlicher Form (z. B. dreizehn) darstellen (und umgekehrt) (Jacobs & Petermann, 2007). Dies muss insbesondere hierzulande als eine große Herausforderung angesehen werden, da diese Zuordnungen sich nicht immer logisch erschließen lassen: „So gibt es die Dreizehn, aber keine Zweizehn, eine Hundertzwei, aber keine Zehnzwei“ (Fritz & Ricken, 2008, S. 29).